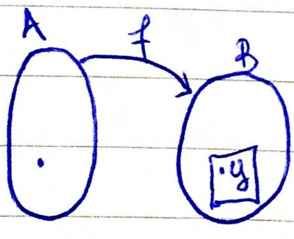
Άσκηση: Αν $f: A \to B$ είναι μια 1-1 συνάρτηση, τότε $\forall X, Y \subseteq A$ ισχύει
$f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$

Λύση: Έστω $X, Y \subseteq A$
Είχαμε αποδείξει προηγουμένως ότι $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$
Αρκεί ν.δ.ο. $f(X) \cap f(Y) \subseteq f(X \cap Y)$

Έστω $y \in f(X) \cap f(Y)$, τότε $y \in f(X)$ κ' $y \in f(X)$
Άρα $\exists x_1 \in X$, ώστε $y = f(x_1)$ κ' $\exists x_2 \in Y$, ώστε $y = f(x_2)$
Έτσι έχουμε $f(x_1) = f(x_2)$
Εφόσον η συνάρτηση f είναι 1-1 προκύπτει ότι $x_1 = x_2$.
Θέτουμε $x = x_1 = x_2$. Έχουμε $x = x_1 \in X$
κ' $x = x_2 \in Y$, άρα $x \in X \cap Y$
Εφόσον $y = f(x)$, προκύπτει $y \in f(X \cap Y)$
Επομένως, $\boxed{f(X) \cap f(Y) \subseteq f(X \cap Y)}$
Συμπεραίνουμε ότι $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$

Αντίστροφη εικόνα συνόλου μέσω συνάρτησης



Έστω $f: A \to B$ μια συνάρτηση κ' $Y \subseteq B$
Ονομάζουμε αντίστροφη εικόνα του Y μέσω της f κ' συμβολίζουμε $f^{-1}(X)$ το εξής σύνολο.
$f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\}$

Έτσι $x\in f^{\to}(Y) \iff f(x)\in Y$

Προφανείς ιδιότητες:

$f^{\to}(\emptyset)=\emptyset$

$\forall Y\subseteq B \quad f^{\to}(Y)\subseteq A$

$\forall x\in X$ ισχύει $x\in f^{\to}(\{f(x)\})$

$f(x)\in\{f(x)\}$.

$f^{\to}(B)=A$

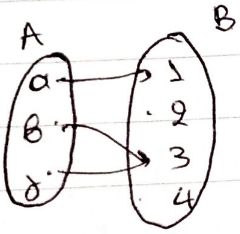
Επίσης $\forall x\in A,\ Y\subseteq B \quad x\notin f^{\to}(Y) \iff f(x)\notin Y$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Η χρησιμοποίηση του συμβολισμού $f^{\to}(Y)$ για $Y\subseteq B$ δεν σημαίνει! σε καμία περίπτωση ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη. (κ' όταν η $f^{\to}$ είναι συνάρτηση)

Αντίθετα, ο συμβολισμός $f^{\to}(y)$ για $y\in B$ έχει νόημα μόνο όταν η f είναι αντιστρέψιμη (κ' άρα η $f^{\to}$ είναι συνάρτηση) το οποίο συμβαίνει μόνο όταν η f είναι 1-1 κ' επί.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Ενδέχεται $f^{\to}(Y)=\emptyset$, ακόμα κ' όταν $Y\neq\emptyset$

Δύο πχς:



$f^{\to}(\{2\})=\emptyset$

$f^{\to}(\{2,4\})$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad f(x)=x^2$

$f^{\to}([-5,-3])=\emptyset$

$f^{\to}((-\infty,0))=\emptyset$

β) Για $y\in B$ το $f^{\to}(\{y\})$ ενδέχεται να έχει παραπάνω από ένα στοιχεία στο πρώτο πχ πριν.

$f^{\to}(\{2\})=\emptyset$

$f^{\to}(\{1\})=\{a\}$

$f^{\to}(\{3\})=\{β,γ\}$

Για την $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=x^2$

$f^{\to}(\{0\})=\{0\}$ $\quad f^{-1}(\{4\})=\{2,-2\}$

$f^{\to}(\{-1\})=\emptyset$

Ιδιότητες της έννοιας της αντίστροφης εικόνας συνάρτησης

Έστω $f: A \to B$ μία συνάρτηση
$X \subseteq B,\ Y \subseteq B$

Τότε:

(i) $X \subseteq Y \Rightarrow f^{-1}(X) \subseteq f^{-1}(Y)$

(ii) $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

(iii) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$

(iv) $f^{-1}(X - Y) = f^{-1}(X) - f^{-1}(Y)$

Απόδειξη: (i) Έστω ότι $X \subseteq Y$ θ.δ.ο. $f^{-1}(X) \subseteq f^{-1}(Y)$
Αν $x \in f^{-1}(X)$ τότε $f(x) \in X$ κ' εφόσον $X \subseteq Y$
έχουμε $f(x) \in Y$, άρα $x \in f^{-1}(Y)$

(ii) Για τυχόν $x \in A$

$$x \in f^{-1}(X \cap Y) \Leftrightarrow f(x) \in X \cap Y$$
$$\Leftrightarrow f(x) \in X \text{ κ' } f(x) \in Y$$
$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$$

(iii) Για τυχόν $x \in A$

$$x \in f^{-1}(X \cup Y) \Leftrightarrow f(x) \in X \cup Y \Leftrightarrow f(x) \in X \text{ ή } f(x) \in Y$$
$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(X) \text{ ή } x \in f^{-1}(Y)$$
$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$$

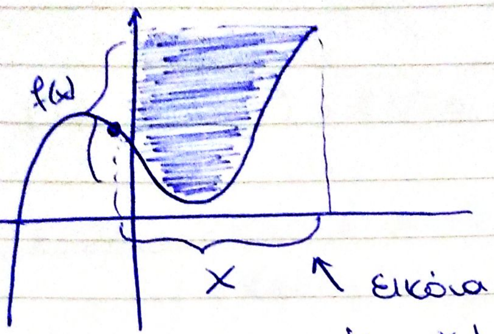
(iv) Έστω τυχόν $x \in A$

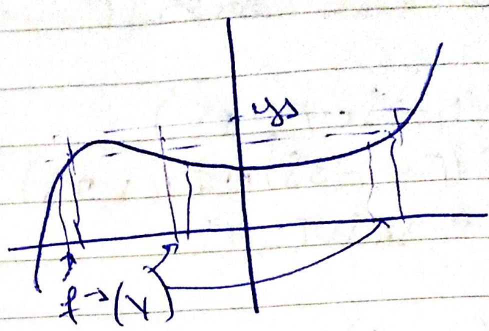
$$x \in f^{-1}(X - Y) \Leftrightarrow f(x) \in X - Y$$
$$\Leftrightarrow f(x) \in X \text{ κ' } f(x) \notin Y$$
$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(X) \text{ κ' } x \notin f^{-1}(Y)$$
$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(X) - f^{-1}(Y)$$

(v) Από το (iv) για $X = B$ προκύπτει ότι

$$f^{-1}(B - Y) = f^{-1}(B) - f^{-1}(Y)$$
$$= A - f^{-1}(Y)$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Η τελευταία ισότητα μπορεί να γραφτεί $f^{-1}(Y^c) = (f^{-1}(Y))^c$

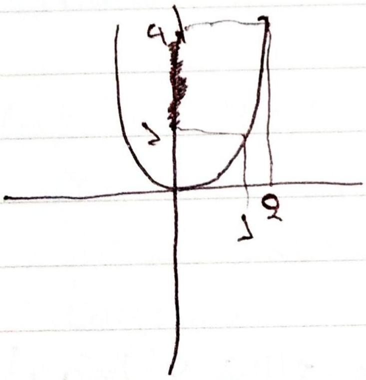




π.χ. Θεωρούμε την $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$

(Σημείωση: Η f δεν είναι 1-1 κ' επί, άρα δεν έχει αντίστροφη. Οπότε δεν ∃ συνάρτηση f^{-1})

(i) $f([1,2]) = \{f(x) : x \in [1,2]\}$
$= \{x^2 \;\; 1 \le x \le 2\}$
$= \{y \in \mathbb{R} \;\; 1 \le y \le 4\} = [1,4]$



(ii) $f([-1,2]) = f([-1,0] \cup [0,2])$
$= f([-1,0]) \cup f([0,2])$
$= [0,1] \cup [0,4] = [0,4]$

η f είναι γν/ς φ' → στο $[-1,0]$
κ' γν/ς α' → στο $[0,2]$

(iii) $f(\mathbb{N}) = \{f(x),\ x \in \mathbb{N}\}$
$= \{x^2\ x \in \mathbb{N}\}$
$= \{1, 4, 9, 16, 25 \ldots\}$

(iv) $f([-4,-3] \cup [1,2])$
$= f([-4,-3]) \cup f([1,2])$
$= [9,16] \cup [1,4]$.

(vi) $f^{-1}([1,4]) = ;$
$x \in f^{-1}([1,4])$
$\Leftrightarrow \underset{x^2}{\underset{\|}{f(x)}} \in [1,4]$
$\Leftrightarrow 1 \leq x^2 \leq 4$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x^2 \\ x^2 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \text{ ή } 1 \leq x \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-2,-1] \cup [1,2]$

Άρα $f^{-1}([1,4]) = [-2,-1] \cup [1,2]$

(v) $f^{-1}([-2,4])$
$x \in f^{-1}([-2,4])$
$\Leftrightarrow \underset{x^2}{\underset{\|}{f(x)}} \in [-2,4]$
$\Leftrightarrow -2 \leq x^2 \leq 4$
$\Leftrightarrow x^2 \leq 4$
$\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow x \in [-2,2]$

(vi) $f^{-1}(f([-2,2]))$

<u>Πρώτο βήμα</u>: Υπολογίζουμε το $f([-1,2])$ κ' βρίσκουμε $f([-1,2]) = [0,4]$
Άρα $f^{-1}(f[-1,2]) = f^{-1}([0,4]) = [-2,2]$.

$\left(x \in f^{-1}([0,4]) \Leftrightarrow \underset{x^2}{\underset{\|}{f(x)}} \in [0,4] \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2 \right)$

iii) $f(f^{-1}([-1,4]))$

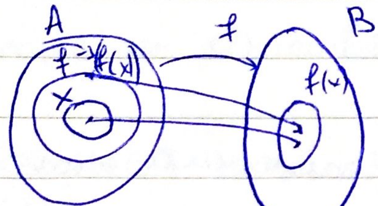
<u>Πρώτο βήμα:</u> Υπολογίζουμε το $f^{-1}([-1,4])$ κ' βρίσκουμε $f^{-1}([-1,4]) = [-2,2]$

$$f(f^{-1}[-1,4]) = f([-2,2]) = [0,4]$$

<u>Πρόταση:</u> Έστω $f: A \to B$ μια συνάρτηση, τότε:

(i) $\forall X \subseteq A$ ισχύει $X \subseteq f^{-1}(f(X))$

(ii) $\forall Y \subseteq B$ $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$



(i) Έστω $X \subseteq A$

$\forall x \in X$ έχουμε $f(x) \in f(X)$, άρα $x \in f^{-1}(f(X))$

Επομένως, $X \subseteq f^{-1}(f(X))$

(ii) Έστω $Y \subseteq B$.

ΝΔΟ $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$. Έστω $y \in f(f^{-1}(Y))$

Τότε $\exists x \in f^{-1}(Y)$, ώστε $y = f(x)$

Εφόσον $x \in f^{-1}(Y)$ θα έχουμε $f(x) \in Y$, άρα (επειδή $f(x) = y$)

έχουμε $y \in Y$. Επομένως, $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$

Έχει πέσει σε εξετάσεις

<u>Άσκηση:</u> Έστω $f: A \to B$ μια επί συνάρτηση

ΝΔΟ $f(f^{-1}(Y)) = Y$ $\forall Y \subseteq B$

<u>Λύση:</u> Αποδείξαμε προηγουμένως ότι $\boxed{f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y}$ (1)

ΝΔΟ $\boxed{Y \subseteq f(f^{-1}(Y))}$ (2)

Έστω $y \in Y$ $(\subseteq B)$

Εφόσον η f είναι επί $\exists x \in A$ ώστε $f(x)=y$.

Αφού $f(x)=y \in Y$ έχουμε $x \in f^{\to}(Y)$

Εφόσον $y=f(x)$ κ' $x \in f^{\to}(Y)$ έχουμε $y \in f(f^{\to}(Y))$

Έτσι δ. η 2

(1), (2) => συμπέρασμα